Dodatna nastava iz matematike

Malo ozbiljnije geometrije

Predavač: A.Pejčev

1. Dat je trougao ABC. Neka je l njegov poluobim. Na pravoj BC uzete su tačke M i N takve da je $AM = AN = l$. Dokazati da krug opisan oko trougla AMN dodiruje krug pripisan trouglu ABC uz stranicu BC.

2. Neka je ABC trougao, D tačka na stranici BC i k kružnica opisana oko trougla ABC. Neka su k_b i k_c kružnice koje dodiruju k, AD, BD i k, AD, DC redom. Dokazati da se kružnice k_b i k_c dodiruju akko je $\angle BAD = \angle CAD$.

3. Krug k_1 dodiruje krug k sa unutrašnje strane u tački C, i dodiruje tetivu AB kruga k u tački D. Neka je M središte luka AB koji je sa suprotne strane prave AB od kruga k_1. Dokazati da je M na pravoj CD.

4. Dat je krug k i njegova tetiva AB, koja ga deli na dva odsečka .U jedan od njih upisani su krugovi k_1 i k_2, i uočeno je središte M luka AB koje odgovara drugom odsečku. Dokazati M pripada radikalnoj osi krugova k_1 i k_2.

5. Dva kruga se dodiruju spolja u tački I. Oni leže u većem krugu koji dodiruju iznutra. Tetiva BC većeg kruga dodiruje manje krugove (ne u I). Zajednička tangenta dva manja kruga dodiruje u I i seče veći krug u A, gde su A i I sa iste strane prave BC. Dokazati da je I centar upisanog kruga trougla ABC.

6. Neka je P tačka unutar trougla ABC takva da je $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$. Neka su D i E centri upisanih krugova trouglova APB i ABC redom. Dokazati da su prave AP, BD, CE konkurentne.

7. Neka su AA_1 i BB_1 odsečci bisektrise unutrašnjih uglova kod temena AiB u trouglu ABC. Dokazati da svaka tačka P duži A_1B_1 ima svojstvo da je $PX_C = PX_A + PX_B$ gde su X_C, X_B, X_A podnožja normala iz P na AB, AC, BC redom i upamtiti to kao lemu. Važi i obrnut smer. Zaključiti da se slična stvar dogadja u slučaju da je tačka P van trougla (v. sledeći zadatak).

8. Neka u prethodnom zadatku poluprava A_1B_1 seče krug pisan oko trougla ABC u D. Dokazati da je
$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}$$
.

9. ABC je oštrougli trougao sa centrom upisanog kruga I i centrom opisanog kruga O. AD i BE su visine, a AP i BQ simetrale uglova. Dokazati da su tačke D, I, E kolinearne akko su tačke P, O, Q kolinearne.

10. Neka je P unutrašnja tačka trougla ABC.
    (a) Dokazati da je zbir njenih rastojanja od temena trougla veći ili jednak zbiru njenih rastojanja od njegovih stranica (**Erdoš-Mordelijeva teorema**).
    (b) Dokazati da je $\frac{PA}{BC^2} + \frac{PB}{AC^2} + \frac{PC}{AB^2} \geq \frac{1}{R}$, gde je R poluprečnik opisanog kruga trougla ABC.
    (c) Dokazati da je barem jedan od uglova PAB, PBC, PCA manji ili jednak $\frac{\pi}{6}$. Uopštiti.

11. Neka su m, n, p pozitivni realni brojevi. Naći tačku P u trouglu ABC za koju je $mPA + nPB + pPC$ minimalno.

12. Neka je data tačka P. Medju trouglovima kod kojih je $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$,$PA = 1$,$PB = 2$,$PC = 3$, naći onaj sa najvećom površinom.

13. Neka je data tačka P. Medju svim trouglovima kod kojih je $PA = 5, PB = 6, PC = 7$, naći onaj sa najvećom površinom.

14. Neka je T težište trougla ABC. Naći tačku P u trouglu za koju je $AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$ minimalno.

15. Neka se krugovi C_1 i C_2 seku u tačkama X i Y. Naći četiri tačke sa sa svojstvom da ako mali krug dodiruje ova dva u P i Q i seče duž XY u R i S, onda svaka od pravih PR, PS, QR, QS prolazi kroz kroz jednu od te četiri tačke.

16. Neka je P unutrašnja tačka trougla ABC. Dokazati da je $min(PA, PB, PC) + PA + PB + PC \leq AB + BC + CA$.

17. ABC je nejednakokraki trougao sa centrom upisanog kruga I. Manji krug kroz I tangentan sa CA i CB seče se sa manjim krugom kroz I tangentnim sa BC i BA u tačkama A_1 i I. B_1 i C_1 se definšu slično. Dokazati da su centri opisanih krugova trouglova AIA_1,BIB_1,CIC_1 kolinearni.

18. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao i X tačka preseka njegovih dijagonala. Ako je $XA \sin A + XC \sin C = XB \sin B + XD \sin D$, onda je $ABCD$ tetivan. Dokazati.

19. Neka je ABC oštrougli trougao u kom je $BC > AC$. O mu je centar opisanog kruga, H mu je ortocentar, a CF visina. Prava kroz F normalna na OF seče AC u P. Dokazati da je $\angle FHP = \angle BAC$.

20. Neka je $ABCD$ tetraedar sa težištem G. Prave AG, BG, CG, DG redom seku sferu opisanu oko tetraedra opet u A_1, B_1, C_1, D_1. Da se pokažu sledeće nejednakosti:

    (a) $GA \cdot GB \cdot GC \cdot GD \leq GA_1 \cdot GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1$

    (b) $\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} \geq \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC_1} + \frac{1}{GD_1}$.

21. Neka je $ABCD$ trapez u kom je $BC \| AD$. M, P, Q su redom središta duži CD, MA, MB. Prave DP i CQ se seku u N. Dokazati da je N u četvorouglu $ABCD$.

22. Neka je I centar upisanog kruga trougla ABC. Dokazati da je za svaku tačku P $BC \cdot PA^2 + CA \cdot BA^2 + AB \cdot PC^2 = BC \cdot AI^2 + CA \cdot BI^2 + AB \cdot IC^2 + (AB + BC + CA) \cdot IP^2$.
    Definicija: Neka su tačke A, B, C, D kolinearne. **Dvorazmera** parova tačaka (A, B) i (C, D), u oznaci $\mathcal{R}(A, B; C, D)$ je odnos $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \div \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ Ako je $\mathcal{R}(A, B; C, D) = -1$, kažemo da su parovi tačaka (A, B) i (C, D) harmonijski spregnuti i to označavamo sa $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Svojstva:

    (a) Neka su a, b, c, d prave jednog pramena. Ako ih prave p i q se ku u tačkama (A_1, B_1, C_1, D_1) i (A_2, B_2, C_2, D_2), onda je $\mathcal{R}(A_1, B_1, C_1, D_1) = \mathcal{R}(A_2, B_2, C_2, D_2)$, te se može uvesti **dvorazmera parova pravih** $(a, b; c, d)$.

    (b) Neka su O_1, O_2, A, B, C, D kociklične tačke. Tada je $\mathcal{R}(O_1A, O_1B, O_1C, O_1D) = \mathcal{R}(O_2A, O_2B, O_2C, O_2D)$ Iz ovoga lako sledi dokaz Teoreme o leptiru.

23. Dat je trougao ABC i tačke M i N na pravoj BC, takve da je $\angle MAN = \frac{\pi}{2}$ i $\mathcal{H}(B, C, M, N)$, onda su AM i AN unutrašnja i spoljašnja simetrala ugla BAC. Dokazati. Obrnut smer je opšte poznat.

24. Ako za tačke M i N u trouglu ABC važi $MA : MB : MC = NA : NB : NC$, onda su one kolinearne sa centrom opisanog kruga trougla ABC.

25. Dat je trougao ABC i na stranici BC tačke D i E tako da je $BD = DE = EC$. Prava p seče duži AB, AD, AE, AC u tačkama K, L, M, N, redom. Dokazati da je $KN \geq 3LM$.

26. Neka su A_1 i B_1 na stranicama BC i AC trougla ABC redom, $D = AA_1 \bigcap BB_1$, $E = A_1B_1 \bigcap CD$. Dokazati da ako je $\angle A_1EC = \frac{\pi}{2}$ i četvorougao ABA_1E je tetivan, onda je $AA_1 = BA_1$.

27. Dat je trougao ABC i tačka T. Neka su P i Q podnožja normala iz T na prave AB i AC redom, i neka su R i S podnožja normala iz A na prave TC i TB redom. Dokazati da se tačka preseka pravih PR i QS nalazi na pravoj BC.

28. Dat je četvorougao $ABCD$. Neka je $P = AB\bigcap CD$, $Q = AD\bigcap BC$, $R = AC\bigcap PQ$, $S = BD\bigcap PQ$. Dokazati da su tačke P, Q, R, S harmonijski spregnute.
Papasova teorema Neka se prave p i q seku u tački S. Na pravoj p su tačke A, B, C, a na pravoj q su tačke A_1, B_1, C_1. Neka je $AB_1\bigcap A_1B = K$, $BC_1\bigcap B_1C = M$, $CA_1\bigcap C_1A = L$. Dokazati da su tačke K, L, M kolinearne.

29. Neka je O centar opisanog kruga, a H ortocentar trougla ABC. Neka je data tačka D takva da je $\angle CDA = \angle ABC = \angle BCD$. Dokazati da su tačke D, HiO kolinearne.

30. Neka je h najduža visina trougla ABC. Dokazati nejednakost: $R + r \leq h$.

31. Dat je tetivni četvorougao $ABCD$. U trouglove BCD, ACD, ABD, ABC su upisani krugovi sa poluprečnicima r_1, r_2, r_3, r_4, redom. Dokazati da je $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

32. Neka je $A_1A_2\ldots A_n$ n-tougao upisan u krug k. Izvršena je triangulacija tog poligona i u tako dobijene trouglove upisani su krugovi. Dokazati da im zbir poluprečnika ne zavisi od trijangulacije.

33. Neka je $ABCD$ tangentan četvorougao i neka upisani krug dodiruje stranice AB, BC, CD, DA u M, N, P, Q. Dokazati da su prave AC, BD, MP, NQ konkurentne.

34. Neka se u tetivnom četvorouglu dijagonale AC i BD seku u tački F, a prave AB i CD u tački E. Ako se krugovi opisani oko trouglova ADF i BCF seku u tački H, dokazati da je $\angle FHE = \frac{\pi}{2}$.

35. Date su tačke X i Y na stranicama BA i BC, tako da je $BX = BY$. Ako je I centar upisanog kruga trougla ABC, dokazati da krug opisan oko trougla MXY dodiruje prave AB, BC i krug opisan oko trougla AMC, gde je M druga tačka preseka krugova opisanih oko trouglova AXM i BYM.

36. U četvorouglu $ABCD$ prave AD i BC seku se u E, a prave AB i CD u F. Dokazati da su središta duži AC, BD i EF kolinearne tačke (prava koja ih sadrži zove se **Gausova linija**).

37. Neka se prave AA_1, BB_1, CC_1 seku u tački P, gde su A_1, B_1, C_1 redom tačke na stranicama BC, CA, AB trougla ABC. Neka je $\dfrac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \dfrac{z}{y}$, $\dfrac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \dfrac{x}{z}$, $\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \dfrac{y}{x}$. Tada je $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PA_1}} = \dfrac{y+z}{x}$ i $\dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QA_1}} = \dfrac{y+z}{2x}$ (**Van Obelova teorema**)

38. U ravni su dati krug c,prava l koja dodiruje c i tačka M na l. Naći skup svih tačaka koje zadovoljavaju sledeći uslov: postoje dve tačke Q i R na l, takve da je M središte duži QR i da je c upisani krug trougla PQR.

39. Dokazati da pedalni trouglovi izogonalno spreghutih tačaka imaju isti opisani krug.